

بسم الله الرحمن الرحيم



نشناخته توصیف مقامش نکنید
علامه اگر هست سلامش نکنید

از فاطمه اکتفا به نامش نکنید
هر کس در او محبت زهرا نیست

هندسه ی فضایی

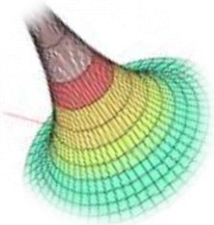
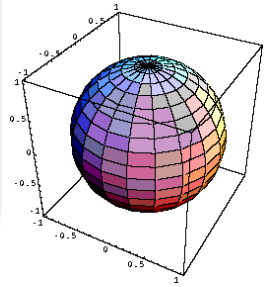
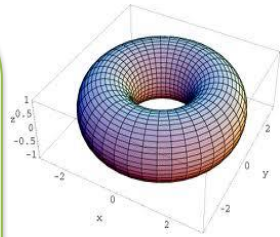


پاسخ تمرینات - فعالیت ها - مسائل

تخیل مهمتر از معلومات است ((اینشتین))

تهیه و تنظیم: ع.الهیان

دیرستان هوشمند دکتر غلامحسین مصاحب



بهار ۹۲

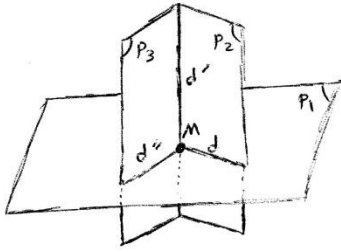
حالت دوم: همگام: هر سه خط (مثل مشترک) از یک نقطه می گذرند. (مقطب باید درست شود که می دانیم $(P_1, P_2 = d, P_3)$)

(2) $d \parallel P_3$ یعنی d صفحه P_3 را در نقطه M قطع کرده لذا: $\left. \begin{matrix} M \in d \\ M \in P_3 \end{matrix} \right\}$

بین M متعلق
عمری 3 فرض
مشترک است چه

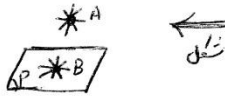
$\left. \begin{matrix} M \in d \Rightarrow \begin{cases} M \in P_2 \\ M \in P_3 \end{cases} \Rightarrow M \in P_2 \cap P_3 = d' \\ M \in d \Rightarrow \begin{cases} M \in P_1 \\ M \in P_3 \end{cases} \Rightarrow M \in P_1 \cap P_3 = d'' \end{matrix} \right\}$

$\left. \begin{matrix} M \in d \\ M \in d' \\ M \in d'' \end{matrix} \right\}$ است.



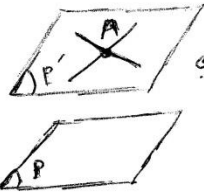
6- از نقطه A خارج صفحه P خطی موازی P رسم کنید.

Ans: در صفحه P خط L را رسم کرده و از نقطه A خط L' را موازی L کشیم و چون L با P از خطوط صفحه P موازی است بین با صفحه P هم موازی است. (این شود که می توانیم خط از نقطه A خارج از صفحه P موازی با صفحه P رسم کرد) همین چون در صفحه P خطی موازی P رسم کردیم و از آن خط L را موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.



7- از نقطه A خارج از صفحه P یک خط موازی صفحه P رسم کنید.

Ans: از نقطه A دو خط q_1 و q_2 موازی صفحه P رسم کنیم و طبق قضیه A صفحه A که از این دو خط می گذرد همان صفحه P خواهد بود.



* نتیجه: از یک نقطه خارج از صفحه P می توان صفحه A را رسم کرد و این صفحه موازی صفحه P است که از آن صفحه A موازی P رسم کنیم و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.

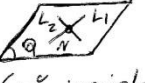
8- از یک نقطه A خارج از صفحه P دو خط موازی P رسم کنید. هر خط q_1 و q_2 موازی P باشند و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.



$P \parallel q_1, P \parallel q_2$ فرض کنیم
نتیجه: $d \parallel q_1, d \parallel q_2$



از P موازی q_1 و q_2 موازی P رسم کنیم و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.



9- از نقطه A خارج از صفحه P دو خط موازی P رسم کنید. هر خط q_1 و q_2 موازی P باشند و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.



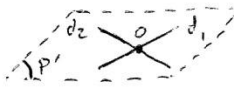
همین در صفحه P خطی موازی P رسم کردیم و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.



همین در صفحه P خطی موازی P رسم کردیم و از آن خط L موازی L کشیم و از آن خط L' موازی L کشیم.

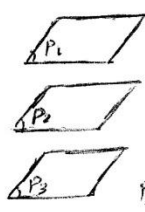
10- اگر دو صفحه ای خارج از صفحه ای باشند P باشد ثابت کنید هادی خط های گذرنده از O که با P موازی اند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

Ans:



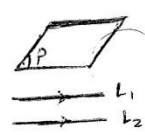
از صفحه ای O خارج از صفحه ای فرض کنیم دو خط d_1 و d_2 به موازات P رسم کرده اند، حال اگر صفحه ای مثل A را در صفحه P اختیار کنیم می توانیم به فرض کنیم که هر خطی که از این نقطه به موازات P دو خط d_1 و d_2 رسم شود نمی تواند در صفحه P قرار گیرد و از طرفین از دو خط d_1 و d_2 که متقاطع اند فقط دو خط یکی صفحه P می گذرد و دیگری موازی است و از طرفین چون P موازی است با P موازی است که هر دو صفحه با هم موازی اند و از هادی خطی موازی گذرنده از O که با P موازی اند به تمامی در یک صفحه موازی P و یعنی P قرار می گیرند.

11- اگر دو صفحه موازی موازی باشند، خودشان با هم موازی اند.



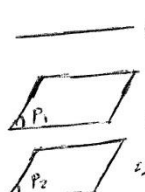
فرض کنیم P_1 و P_2 باشند و صفحه سوم P_3 باشد حال با استفاده از برهمنی همگام P_1 فرض کنیم P_1 موازی P_2 باشد $(P_1 \parallel P_2)$ (هم متقاطع باشند) (فرض خلاف) پس بدیهه می باشد که می گوید اگر صفحه ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می کند پس P_3 را هم قطع می کند که خلاف فرض است (چون مسئله گفته که این دو صفحه هرگز با هم موازی نیستند) پس فرض خلاف باطل است. لذا: $P_1 \parallel P_2$ است.

12- اگر صفحه ای با یکی از دو خط موازی موازی باشد با دیگری هم موازی است.



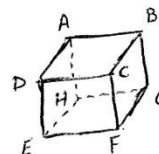
برهمنی همگام: اگر $P \parallel L_2$ (فرض خلاف) پس صفحه P خط L_2 را قطع می کند و از آنجا بدیهه می باشد که L_1 متقاطع می باشد. اگر صفحه ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می کند پس P را هم قطع می کند یعنی $P \parallel L_1$ که خلاف فرض است پس فرض خلاف باطل است. $P \parallel L_2 \Rightarrow P \parallel L_1$ و $P \parallel L_1 \Rightarrow P \parallel L_2$

13- ثابت کنید صفحه ای که با یکی از دو صفحه موازی موازی است با دیگری هم موازی است.



برهمنی همگام: اگر $L \parallel P_2$ (فرض خلاف) پس L صفحه P_2 را قطع می کند و از آنجا بدیهه می باشد که L متقاطع می باشد. اگر صفحه ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می کند پس L را هم قطع می کند یعنی $L \parallel P_1$ پس مشاهده شود که خلاف فرض است پس فرض خلاف باطل است. $L \parallel P_1 \Rightarrow L \parallel P_2$ است.

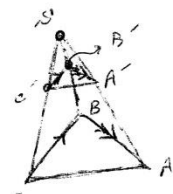
14- در فرضه اگر صفحه ای از دو خط موازی را قطع کند، آیا لزوماً دیگری را هم قطع می کند؟ در صورت درستی این حکم، آنرا ثابت کنید در صورتی که خطی موازی با EF باشد $DE \parallel BG$ و DE را قطع می کند و متقاطع نیست.



و می توان خطوط دیگری را هم در این شکل مثال زد که در شرایط فوق صدق کنند.

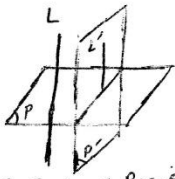
15- اگر دو خط در دو صفحه موازی قرار داشته باشند، آیا می توانیم ثابت کنیم این دو خط موازی اند، در صورت درستی آن را ثابت کنید در صورتی که نامدرست است، یک مثال با شکل رسم کنید. Ans: نامدرست است. مثلاً در شکل مسئله 14 خط CB و DE در دو صفحه موازی $DAHE$ و $CBGF$ قرار دارند ولی نسبت به هم همگام نیستند موازی.

16- ثابت کنید در یک جسم و وسط ایهای آن، در یک صفحه موازی عمود بر همه چهار دارند.



Ans: $\Delta SBC \Rightarrow$ وسط BC و SA \Rightarrow $\frac{SB}{SA} = \frac{SC}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ از یکسوی $BC \parallel SA$
 $\Delta SAB \Rightarrow$ وسط AB و SC \Rightarrow $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ از یکسوی $BA \parallel SC$
 در دو خط متقاطع از صفحه ABC با دو خط متقاطع از صفحه $A'B'C'$ موازی اند، پس دو صفحه موازی اند.

34- اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P موازی است؟ (راهی، صفحه P دارای یک خط عمود بر صفحه P است.)



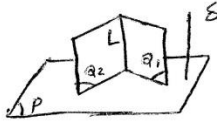
Ans: $P \perp P' \Rightarrow L \perp P' \Rightarrow L \parallel P'$

(برای خط عمود بر صفحه P، عمود بر صفحه P است) $L \perp P' \Rightarrow L \parallel P'$
 هر خط عمود بر صفحه P عمود بر صفحه P است (با هم موازی اند)

چون $P \perp P'$ است پس P شامل خطی مانند L است که بر P' عمود است

طبق قضیه 17) می:

35- اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P موازی است؟ (راهی، یک خط عمود بر صفحه P در هر نقطه بگیریم و عمود بر صفحه P است به نسبت به صفحه P و P' چگونه است.)



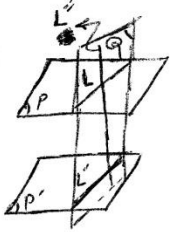
Ans: $Q_1, Q_2 \perp P \Rightarrow L \perp P$

فرض می کنیم $L \perp P$ است:

$$\left\{ \begin{array}{l} L \perp P \\ Q_1 \perp P \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از قضیه 34}} L \parallel Q_1 \xrightarrow{\text{موازی بر خط عمود بر صفحه P}} L \perp P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \perp P \\ Q_2 \perp P \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از قضیه 34}} L \parallel Q_2 \xrightarrow{\text{موازی بر خط عمود بر صفحه P}} L \perp P$$

اگر خطی از دو صفحه موازی بر صفحه P عمود باشد، دیگر در تمام عمود است. اگر خطی از دو صفحه موازی بر صفحه P عمود باشد، موازی با خط عمود مشترکشان موازی است.

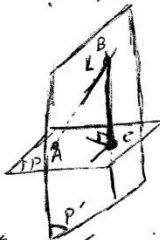
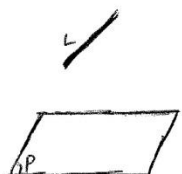


36- اگر صفحه ای بر صفحه موازی عمود باشد بر خط عمود است؟

Ans: طبق قضیه 17) هر خط عمود بر صفحه موازی موازی با خط عمود مشترکشان موازی است. اگر خط عمود بر صفحه موازی موازی با خط عمود مشترکشان موازی است، پس موازی با خط عمود مشترکشان موازی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \perp P \\ L' \perp P' \end{array} \right\} \Rightarrow L \parallel L' \Rightarrow L \perp P' \Rightarrow L' \perp P' \Rightarrow L' \perp P' \Rightarrow L' \perp P'$$

37- از هر خط L که بر صفحه P عمود نیست، یک خط عمود بر صفحه P عمود باشد؟



Ans: چون $L \perp P$ پس حالت کلی این است که خط عمود بر صفحه P را در نقطه ای مثل A عمود می کند. حال از نقطه A مثل B در خط عمود بر صفحه P رسم می کنیم. خط عمود بر صفحه P را در C عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در D عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در E عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در F عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در G عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در H عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در I عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در J عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در K عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در L عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در M عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در N عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در O عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در P عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در Q عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در R عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در S عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در T عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در U عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در V عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در W عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در X عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در Y عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در Z عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AA عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AB عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AC عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AD عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AE عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AF عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AG عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AH عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AI عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AJ عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AK عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AL عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AM عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AN عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AO عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AP عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AQ عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AR عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AS عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AT عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AU عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AV عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AW عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AX عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AY عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AZ عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BA عمود می کند.

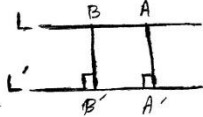
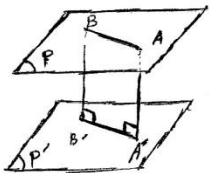
خط عمود بر صفحه P را در BB عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BC عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BD عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BE عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در BF عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BG عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BH عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BI عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در BJ عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BK عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BL عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BM عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در BN عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BO عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BP عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در BQ عمود می کند.

38- هر چند که سطح دریم، که برای هر دو خط موازی L و L'، فاصله هر دو نقطه از خط L تا خط L' مساوی است و این مقدار مساوی است با فاصله هر دو خط موازی L و L'، ثابت می ماند. ثابت کنید برای دو صفحه P و P'، فاصله هر دو نقطه از صفحه P تا صفحه P' برابر است. این مقدار مساوی با فاصله این دو صفحه موازی می نامیم.



Ans: از فرضیه نگاه A و B بر صفحه P عمودهای رسم می کنیم تا صفحه P عمود بر A و B. خط عمود بر صفحه P را در A عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در B عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در C عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در D عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در E عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در F عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در G عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در H عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در I عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در J عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در K عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در L عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در M عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در N عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در O عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در P عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در Q عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در R عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در S عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در T عمود می کند.

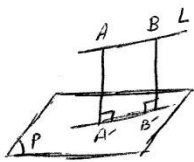
خط عمود بر صفحه P را در U عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در V عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در W عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در X عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در Y عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در Z عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AA عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AB عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AC عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AD عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AE عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AF عمود می کند.

خط عمود بر صفحه P را در AG عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AH عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AI عمود می کند. خط عمود بر صفحه P را در AJ عمود می کند.

39- اگر خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ موازی باشد به ثابت کنید هر دو نقطه از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ مساوی است، این مقدار سازی را با صفحه خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ می نامند.



Ans:

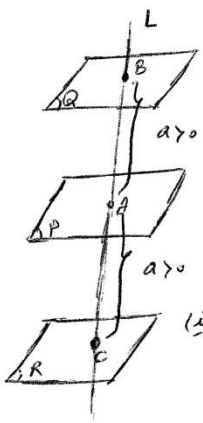
از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ موازی باشد به ثابت کنید هر دو نقطه از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ مساوی است، این مقدار سازی را با صفحه خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ می نامند.
 از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ موازی باشد به ثابت کنید هر دو نقطه از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ مساوی است، این مقدار سازی را با صفحه خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ می نامند.

باید ثابت کنیم چهارضلعی \$ABB'A'\$ متوازی الاضلاع است، به دلیل اینکه \$AA' \parallel BB'\$ و \$AB \parallel A'B'\$ (چون \$L \parallel P\$).
 همچنین \$AA' \perp P\$ و \$BB' \perp P\$ پس \$AA' \parallel BB'\$ و \$AA' = BB'\$.
 بنابراین \$ABB'A'\$ متوازی الاضلاع است و \$AB = A'B'\$ و \$AA' = BB'\$.

پس: $\begin{cases} AA' \perp P \\ BB' \perp P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \in PNP' \\ B \in PNP' \end{cases} \Rightarrow A'B' \subset L$
 هر صفحه که از \$L\$ بگذرد و با \$P\$ متقاطع باشد، \$P\$ را در این خط موازی متقاطع می کند.

4- ثابت کنید برای هر عدد \$0 < \alpha < 90\$، همان هندسه نقطه های از خط \$L\$ که از صفحه های ما به \$P\$ فاصله \$a\$ هموار دارند، در صفحه موازی \$P\$ است که در هر طرف \$P\$ قرار دارند و فاصله هر کدام با \$P\$ برابر \$a\$ است.

Ans: می توانیم مسأله را در فضای 3 بعدی و در صورتی که \$L\$ و \$P\$ موازی باشند، در نظر بگیریم. فرض کنیم \$L\$ و \$P\$ موازی باشند و \$L\$ را به خط \$L'\$ موازی با \$P\$ منتقل کنیم. در این صورت، هر نقطه از \$L\$ که فاصله \$a\$ از \$P\$ داشته باشد، در خط \$L'\$ قرار خواهد گرفت و فاصله آن از \$P\$ برابر \$a\$ خواهد بود.



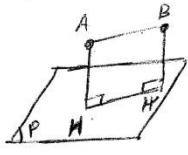
1) باید ثابت کنیم هر نقطه ای که دارای ویژگی مورد نظر است، از خط \$L\$ یا صفحه \$P\$ می آید.
 و نقاط را مطابق شرایط در دو صفحه موازی \$P\$ و \$P'\$ قرار می دهیم. فرض کنیم \$L\$ و \$P\$ موازی باشند و \$L\$ را به خط \$L'\$ موازی با \$P\$ منتقل کنیم. در این صورت، هر نقطه از \$L\$ که فاصله \$a\$ از \$P\$ داشته باشد، در خط \$L'\$ قرار خواهد گرفت و فاصله آن از \$P\$ برابر \$a\$ خواهد بود.

عکس 2) باید ثابت کنیم هر نقطه ای که در صفحه موازی \$P\$ قرار دارد و فاصله آن از \$P\$ برابر \$a\$ است، دارای ویژگی مورد نظر است.

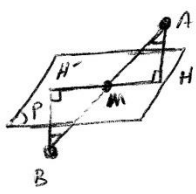


$M_1, M_2, M_3 = C - \gamma$

41- اگر دو نقطه \$A\$ و \$B\$ از صفحه \$P\$ به یک فاصله \$a\$ و \$A\$ و \$B\$ هر دو در یک طرف \$P\$ باشند، ثابت کنید خط \$AB\$ موازی \$P\$ است و آنرا \$D\$ و \$B\$ در هر طرف \$P\$ قرار دهند، ثابت کنید صفحه \$P\$ موازی با خط \$AB\$ می گذرد.



Ans: حل قسمت اول: از آنجا که \$A\$ و \$B\$ هر دو در یک طرف \$P\$ قرار دارند و فاصله هر دو از \$P\$ برابر \$a\$ است، پس \$AH = BH = a\$ و \$AH \perp P\$ و \$BH \perp P\$.
 بنابراین \$AH \parallel BH\$ و \$AH = BH\$، پس \$AB \parallel HH'\$ و \$AB = HH'\$.
 از آنجا که \$HH' \perp P\$، پس \$AB \perp P\$ و \$AB\$ موازی \$P\$ است.



حل قسمت دوم: از آنجا که \$A\$ و \$B\$ در دو طرف \$P\$ قرار دارند و فاصله هر دو از \$P\$ برابر \$a\$ است، پس \$AH = BH = a\$ و \$AH \perp P\$ و \$BH \perp P\$.
 بنابراین \$AH \parallel BH\$ و \$AH = BH\$، پس \$AB \parallel HH'\$ و \$AB = HH'\$.
 از آنجا که \$HH' \perp P\$، پس \$AB \perp P\$ و \$AB\$ موازی \$P\$ است.